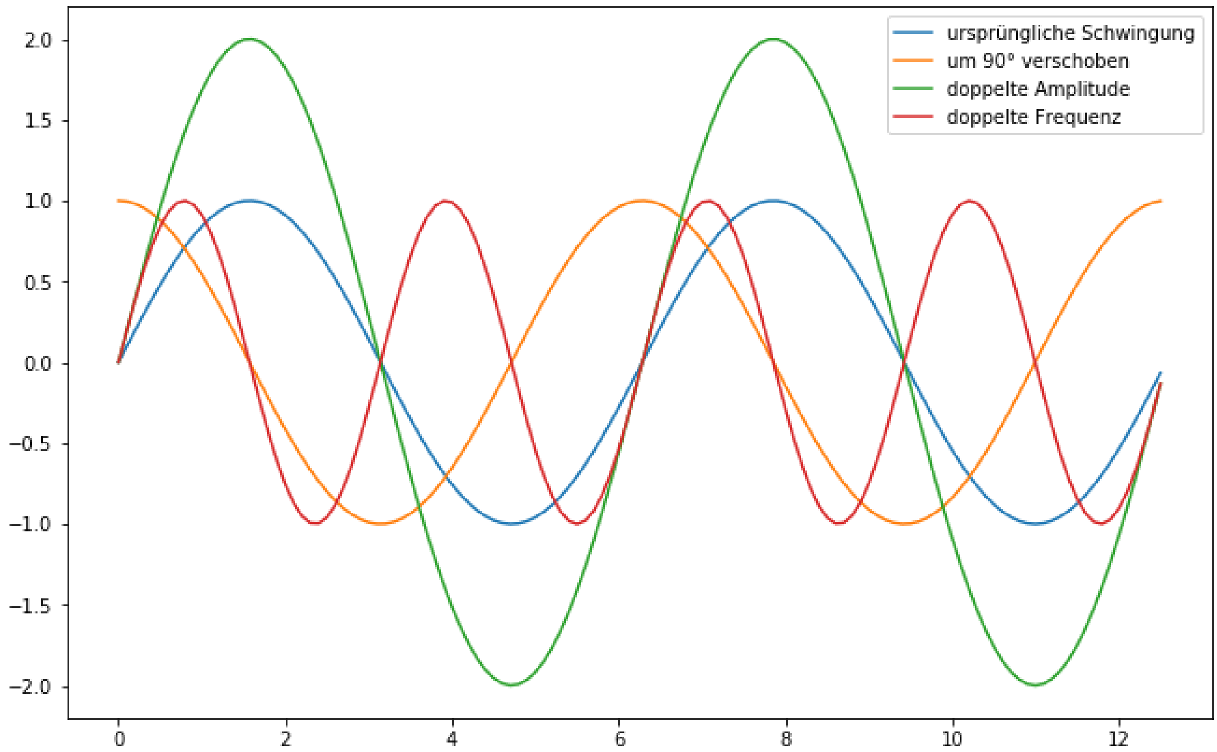
Fragen zu Wellen und Schwingungen

Verständnisfragen

1. Was unterscheidet eine Schwingung und eine Welle voneinander?

   Lösung: Eine Schwingung weist eine zeitliche Periodizität auf, eine Welle eine örtliche und zeitliche. Eine Welle besteht aus sehr vielen zueinander verschobenen Schwingungen.

2. Zeichnen Sie eine beliebige Schwingung im A-t-Diagramm. Zeichnen Sie nun in dasselbe Diagramm dieselbe Schwingung jeweils um 90° in positive Zeitrichtung verschoben, mit doppelter Amplitude und mit doppelter Frequenz ein.

   Repräsentative Lösung:

3. Nennen Sie jeweils drei Beispiele für longitudinale und transversale Wellen denen man im Alltag begegnet.

   Lösung:

   Longitudinale Welle: z.B. Schallwellen, Druckwellen, Wellen in einer Feder, etc.

   Transversale Wellen: z.B. elektromagnetische Welle, seismische Wellen, Wellen auf einer Drahtseite, etc.

4. Ist Wechselstrom eine Schwingung oder eine Welle? Falls es eine Welle ist, ist sie longitudinal oder transversal? Beachten Sie dabei, dass es sich um Bewegungen von Elektronen im Leiter, nicht um Bewegungen des Elektromagnetischen Feldes handelt.

Lösung: Bei Wechselstrom handelt es sich um eine longitudinale Welle mit einer sehr großen Wellenlänge (etwa 6000km), weshalb seine Welleneigenschaften gemeinhin vernachlässigt werden können. Sie ist longitudinal, da die Amplitude des Stroms sich entlang seiner Strömungsrichtung ändert.

5. Was wird bei einer Welle transportiert?

   Lösung: Bei einer Welle wird Energie, aber keine Masse transportiert.

6. Was haben Knoten und Bäuche mit Wellen zu tun?

   Lösung: Bei einer stehenden Welle gibt es sogenannte Knoten und Bäuche. Knoten sind die Abschnitte des Mediums, die bei der stehenden Welle keine Schwingung erfahren, Bäuche hingegen die Abschnitte, die die maximale Schwingung erfahren.

Rechenaufgaben

7. Schwingungen belasten den menschlichen Körper. Sie lösen die bekannte Reisekrankheit aus und können bei langfristiger Einwirkung zu Veränderung des Knochen-, Muskel- und Nervensystems führen. Viele Menschen sind an ihrem Arbeitsplatz mechanischen Schwingungen ausgesetzt, etwa bei der Nutzung von Land-, Wasser- und Luftfahrzeugen aber auch bei der Nutzung handgeführter Werkzeuge. Durch Schwingungen ausgelöste Erkrankungen sind darum als Berufskrankheiten anerkannt.

   Besonders belastet sind Lastwagenfahrer. Die Amplitude der Sitzschwingung betrage nun 0,88cm.

   a) Der Sitz des Lastwagenfahrers ist 2,32s nach Messungsstart um 0,664cm gegen die Gleichgewichtsposition ausgelenkt, nach 2,48s dagegen um -0,499cm. Bestimmen Sie die Schwingungsfrequenz.

      Hinweis: Beachten Sie, dass die tatsächliche Frequenz ein Vielfaches der hier berechneten sein kann. Aus vorherigen Messungen wissen Sie, dass die Frequenz sich zwischen 4,5Hz und 5Hz bewegen sollte.

   b) Die von der EU vorgegebene maximale Schwingungsbeschleunigung entlang der Wirbelsäule bei Arbeitsbelastung beträgt $0{,}8\frac{m}{s^2}$. Es gilt wieder, dass $v(t) = \frac{dx}{dt}$ und $a(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$. Überschreitet der Lastwagenfahrer diesen Wert?

   c) Ein neuer luftgedämpfter Sitz in der Fahrerkabine dämpft die Schwingungsintensität um 42%. Wird der Grenzwert nun eingehalten?

   d) Bestimmen Sie, welche Schwingungsenergie ein Fahrer mit 82kg Gewicht gedämpft und ungedämpft hat.

Lösung:

a) Für die Auslenkung gilt $x(t) = A_0 sin(\omega t) \Leftrightarrow \omega = \frac{arcsin\left(\frac{x(t)}{A_0}\right)}{t}$. Mit den zwei gegebenen Werten erhält man $\omega_1 = \frac{arcsin\left(\frac{0{,}664cm}{0{,}88cm}\right)}{2{,}32s} \approx 0{,}369\frac{1}{s} \Rightarrow f \approx 0{,}06Hz$ und $\omega_1 =$

$\frac{arcsin\left(\frac{-0,499cm}{0,88cm}\right)}{2,48s} \approx -0,243\frac{1}{s} \Rightarrow f \approx 0,04Hz$. Das Einzige gemeinsame Vielfache dieser beiden Werte zwischen 4,5Hz und 5Hz ist 4,8Hz.

b) Die Beschleunigung ist eine Sinusfunktion und wird damit bei Vielfachen von $\pi/2$ maximal. Es muss darum gelten $\frac{\pi}{2} = \omega t \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2\omega}$, man erhält somit $t = \frac{\pi}{2 \cdot 2\pi \cdot 4,8Hz} \approx 0,052s$. Setzt man diese Werte in die Formel ein, so erhält man $a(0,052s) = -0,0088m \cdot (2 \cdot \pi \cdot 4,8Hz)^2 \cdot sin(2 \cdot \pi \cdot 4,8Hz \cdot 0,052) \approx 8,00\frac{m}{s^2}$. Der Fahrer überschreitet den Wert also um das 10fache.

c) Die neue Amplitude beträgt also $A_1 = 0,42 \cdot A_0 \Rightarrow A_1 = 0,3696cm$. Die Beschleunigung beträgt damit nurnoch $a(0,052s) = -0,003696m \cdot (2 \cdot \pi \cdot 4,8Hz)^2 \cdot sin(2 \cdot \pi \cdot 4,8Hz \cdot 0,052) \approx 3,36\frac{m}{s^2}$. Der Fahrer kann also noch immer die Grenzwerte nicht einhalten.

d) Die Gleichung für die Schwingungsenergie ist $W = \frac{1}{2}m\omega^2 \cdot A^2$. Man erhält damit für den ungedämpften Fahrer $W = \frac{1}{2} \cdot 82kg \cdot (2\pi \cdot 4,8Hz)^2 \cdot (0,0088m)^2 \approx 2,89J$ und für den gedämpften Fahrer $W = \frac{1}{2} \cdot 82kg \cdot (2\pi \cdot 4,8Hz)^2 \cdot (0,003693m)^2 \approx 0,51J$

8. Berechnen Sie zu folgenden Fällen jeweils die fehlenden Größen, so dass am Ende für jeden der Fälle die Größen der Frequenz f, Wellenlänge λ, Geschwindigkeit v, Kreisfrequenz ω und Kreiswellenzahl k (Anzahl der Schwingungen, die pro 2π ausgeführt werden, berechnet über $k = \frac{2\pi}{\lambda}$) vorliegen.

a) Eine Wasserwelle hat eine Wellenlänge von 1,8cm und eine Ausbreitungsgeschwindigkeit von 1,8m/s.

b) Eine Gitarrensaite schwingt mit einer Frequenz von 440Hz und hat eine Ausbreitungsgeschwindigkeit von 880m/s.

c) Ein Zweitaktmotor läuft mit 3600 Umdrehungen pro Minute. Das ausgestoßene Gas hat eine Geschwindigkeit von 30m/s. (Gefragt ist hier nach den Wellen im Gas)

d) Wechselstrom in Deutschland hat eine Ausbreitungsgeschwindigkeit von 300000km/s und eine Kreiswellenzahl von etwa $1,05 \cdot 10^{-6}$ 1/m.

e) Röntgenstrahlung hat eine Kreiswellenzahl von 757010278 1/m.

Lösung:

Teilaufgabe	Frequenz f	Wellenlänge λ	Geschwindigkeit v	Kreisfrequenz ω	Kreiswellenzahl k
a)	100Hz	0,018m	1,8m/s	628,32 1/s	35,37 1/m
b)	440Hz	2m	880m/s	2764,60 1/s	3,14 1/m
c)	9,55 Hz	3,14m	30m/s	60 1/s	2,00 1/m
d)	50,13Hz	5983986,00 m	300000000m/s	314,98 1/s	$1,05 \cdot 10^{-6}$ 1/m

e)	$3{,}61\cdot10^{16}$ Hz	$8{,}3\cdot10^{-9}$ m	300000000m/s	$2{,}27\cdot10^{17}$ 1/s	757010278 1/m

a)

9. Eine Gitarrensaite ist ein an beiden Enden befestigter Resonator. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen auf einer Gitarrensaite beträgt 880m/s. Beim Anschlagen findet man auf einer Gitarrensaite in einem speziellen Fall Wellen der Wellenlänge 0,52m, 0,312m und 0,195m die einander überlagern. Bestimmen Sie welchen Oberschwingungen diese Wellenlängen entsprechen, die Länge der Saite und die Schwingungsfrequenz der Grundschwingung.

   Lösung: Die zunächst anzustellende Überlegung ist, dass die Länge der Saite die halbe Wellenlänge der Grundschwingung ist. Die Wellenlänge der Grundschwingung ist nicht angegeben, wohl aber die mehrerer Oberschwingungen. Die Länge der Saite muss ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlängen dieser Oberschwingungen sein, denn es gilt $L = \frac{n\cdot\lambda}{2}$. Das nächste ganzzahlige Vielfache der halben Wellenlängen ist 0,78m, denn $\frac{3\cdot 0{,}52m}{2} = 0{,}78m$, $\frac{5\cdot 0{,}312m}{2} = 0{,}78m$, $\frac{8\cdot 0{,}195m}{2} = 0{,}78m$. Die angegebenen Schwingungen sind also die 2ten, 4ten und 7ten Oberschwingungen einer 0,78m langen Saite. Die Grundschwingung hat damit eine Wellenlänge von 1,56m. Mit der angegebenen Ausbreitungsgeschwindigkeit ergibt sich damit eine Frequenz von etwa 564,1Hz.

10. Zur Sichtbarmachung innerer Organe und Strukturen wird in der Medizin häufig das Verfahren der Sonographie verwendet. Hierbei werden gepulste Ultraschallwellen durch den Körper geleitet und die Reflektionen ausgewertet. In diesem Fall möchten Sie die Gallenblase auf Gallensteine untersuchen. Hierzu wird eine maximale Schalleindringtiefe von 20cm gewählt. Über der Gallenblase liegen 2,5cm Fettgewebe ($K = 190{,}12 \cdot 10^7 \frac{kg}{ms^2}$, $\rho = 0{,}97 \frac{g}{cm^3}$) und 12cm Muskelgewebe ($K = 255{,}70 \cdot 10^7 \frac{kg}{m\cdot s^2}$, $\rho = 1{,}04 \frac{g}{cm^3}$), die von den Schallwellen durchdrungen werden müssen. Die Galle selbst ins gefüllt mit Gallenflüssigkeit ($K = 235{,}50 \cdot 10^7 \frac{kg}{ms^2}$, $\rho = 0{,}993 \frac{g}{cm^3}$) und ggf. Gallensteinen ($E = 220{,}32 \cdot 10^8 \frac{kg}{ms^2}$, $\rho = 1{,}7 \frac{g}{cm^3}$). Das von Ihnen verwendete Gerät hat eine Frequenz von 3MHz und eine Intensität von $110 \frac{mW}{cm^2}$.

    (Anmerkung: Das Elastizitätsmodul E bei Festkörpern entspricht der Steifigkeit K bei Gasen und Flüssigkeiten.)

    a) Bestimmen Sie die Schallgeschwindigkeit in jedem der genannten Medien.

    b) Berechnen Sie den Schallintensitätspegel L_I des Geräts.

    c) Wie bereits erwähnt werden bei der Sonographie gepulste Ultraschallwellen verwendet. Das bedeutet, dass das Gerät für einen kurzen Zeitraum Schallwellen aussendet und die nächste Wellenaussendung erst erfolgt, wenn alle Echos des vorherigen Schalls wieder vom Gerät aufgenommen wurden. Ohne pathologischen Befund, d.h. wenn keine Gallensteine auftreten, wie lang müssen Sie maximal auf das Echo warten? Wie hoch darf damit Ihre Pulsfrequenz maximal sein?

d) Die Reflektion R der Schallwellen an einer Grenzfläche ist abhängig von dem Wellenwiderstand z der beiden Medien: $R = \left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1}\right)^2$. An einer Grenzschicht gilt für Transmission T und Reflektion R$1 = T + R$. Der Schall durchläuft zwei reflektierende Grenzschichten bevor er die Gallenblase erreicht. Nur der transmissierte Schall läuft jeweils weiter. Es folgt daraus, dass $I_G = I(1 - R_1 - R_2)$. Welche Schallintensität kommt demnach noch in der Gallenblase an?

e) Ein Gallenstein reflektiert nun die Schallwelle. Welche Intensität hat die reflektierte Schallwelle, wenn sie vom Gerät detektiert wird? Wie kann die Reflektion von dem Gallenstein von der Reflektion des Fett- und Muskelgewebes oder der Gallenflüssigkeit unterschieden werden?

f) Luft hat eine Schallgeschwindigkeit von $v = 331\,\frac{m}{s}$ und eine Dichte von $0{,}0012\,\frac{g}{cm^2}$. Warum wird auf Ultraschallköpfe von der Benutzung immer ein dickflüssiges Gele aufgetragen?

Lösung:

a) Die benötigte Formel ist $v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$

Fettgewebe: $v = 1400{,}00\,\frac{m}{s}$

Muskelgewebe: $v = 1568{,}01\,\frac{m}{s}$

Gallenflüssigkeit: $v = 1540{,}00\,\frac{m}{s}$

Gallensteine: $v = 3600{,}00\,\frac{m}{s}$

b) Es gilt $110\,\frac{mW}{cm^2} = 1100000\,\frac{mW}{m^2} = 1100\,\frac{W}{m^2}$. Über $L_I = 10 \cdot log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ folgt $L_I = 10 \cdot log\left(\frac{1100\frac{W}{m^2}}{10^{-12}\frac{W}{m^2}}\right) \approx 150{,}41 dB$.

c) Das durchdrungene Gewebe besteht aus 2,5cm Fettgewebe, 12cm Muskelgewebe und 5,5cm Gallenflüssigkeit. Jede dieser Schichten muss vom Schall zweimal durchlaufen werden, bevor das Echo am Ultraschallkopf anlangt. Mit den berechneten Geschwindigkeiten ergibt sich über $v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$

$t = 2 \cdot \frac{0{,}025m}{1400\frac{m}{s}} + 2 \cdot \frac{0{,}12m}{1568{,}01\frac{m}{s}} + 2 \cdot \frac{0{,}055m}{1540\frac{m}{s}} \approx 2{,}60 \cdot 10^{-4}s = 0{,}26ms$. Dies entspricht einer Pulsfrequenz von 3843,15Hz.

d) Berechnen wir zunächst die Reflektionen einzelnen Grenzflächen. An der Grenze zwischen Fett- und Muskelgewebe gilt $R_1 = \left(\frac{1040\frac{kg}{m^3} \cdot 1568{,}01\frac{m}{s} - 970\frac{kg}{m^3} \cdot 1400\frac{m}{s}}{1040\frac{kg}{m^3} \cdot 1568{,}01\frac{m}{s} + 970\frac{kg}{m^3} \cdot 1400\frac{m}{s}}\right)^2 \approx 8{,}33 \cdot 10^{-3}$ und an der Grenze zwischen Muskelgewebe und Gallenflüssigkeit gilt $R_1 =$

$\left(\frac{993\frac{kg}{m^3}\cdot 1540\frac{m}{s}-1040\frac{kg}{m^3}\cdot 1568{,}01\frac{m}{s}}{993\frac{kg}{m^3}\cdot 1540\frac{m}{s}+1040\frac{kg}{m^3}\cdot 1568{,}01\frac{m}{s}}\right)^2 \approx 1{,}03\cdot 10^{-3}$. Hieraus erhält man eine Intensität von $I_G = 110\,\frac{mW}{cm^2}(1-8{,}33\cdot 10^{-3}-1{,}03\cdot 10^{-3}) \approx 108{,}97\,\frac{mW}{cm^2}$.

e) Aus d ist bereits die Intensität der Schallwelle bekannt, die den Gallenstein erreicht. Diese wird nun reflektiert. Für die Reflektion gilt $R = \left(\frac{1700\frac{kg}{m^3}\cdot 3600\frac{m}{s}-993\frac{kg}{m^3}\cdot 1540\frac{m}{s}}{1700\frac{kg}{m^3}\cdot 3600\frac{m}{s}+993\frac{kg}{m^3}\cdot 1540\frac{m}{s}}\right)^2 \approx 0{,}36$. Es werden also 36% der am Gallenstein eintreffenden Schallintensität reflektiert. Dies beträgt $I_{Ref} = I_G\cdot R \Rightarrow I_{Ref} \approx 39{,}23\,\frac{mW}{cm^2}$. Die reflektierte Welle durchläuft, bis sie am Ultraschallkopf eintrifft, erneut zwei Grenzschichten, für die die in d hergeleitete Formel gilt. Die detektierte Intensität beträgt damit $I_{det} \approx 38{,}86\,\frac{mW}{cm^2}$.

Die verschiedenen Reflektionen können voneinander über zwei Wege unterschieden werden. Einmal wurde nun gezeigt, dass bei jeder Reflektion die Intensität der weiterlaufenden Schallwelle abnimmt. Die verschiedenen reflektierten Schallwellen können also über ihre Intensität unterschieden werden. Ist die Tiefe des untersuchten Bereichs ungefähr bekannt, so können die Signale der anderen Reflektionen von dem gewünschten Signal auch über ihre Laufzeit unterschieden werden.

f) Die Reflektion zwischen dem obersten Fettgewebe und Luft beträgt $R = \left(\frac{970\frac{kg}{m^3}\cdot 1400\frac{m}{s}-1{,}2\frac{kg}{m^3}\cdot 331\frac{m}{s}}{970\frac{kg}{m^3}\cdot 1400\frac{m}{s}+1{,}2\frac{kg}{m^3}\cdot 331\frac{m}{s}}\right)^2 \approx 0{,}9988$, es werden also 99,88% der Schallintensität reflektiert. Lufteinschlüsse zwischen Ultraschallkopf und Bauchdecke müssen darum unbedingt vermieden werden. Das Gele dient als Einkoppler, es vermeidet Lufteinschlüsse und senkt die Reflektion.

11. Mit Hilfe des Doppler-Effekts kann auch das Strömen von Flüssigkeiten in der Sonographie sichtbar gemacht werden, denn das Echo der bewegten Zellen ist durch den Doppler-Effekt frequenzverschoben. Sie nutzen wieder das oben bezeichnete Ultraschallgerät mit einer Frequenz von 3MHz. Sie möchten den Fluss in einem Blutgefäß sehr nah unter der Haut sichtbar machen. Die Schallgeschwindigkeit in Blut beträgt 1570m/s.

a) Bestimmen Sie zunächst die Formel für die Frequenzveränderung durch den Dopplereffekt. Der Ultraschallkopf ist hierbei ein ruhender Sender.

b) Wie verändert sich die obige Formel, wenn die Schalllaufrichtung nicht senkrecht zum Blutfluss steht? Bedenken Sie, dass in diesem Fall der Geschwindigkeitsvektor auf die Senkrechte zur Schallaufrichtung projiziert wird.

c) Bei einer Messung mit senkrechtem Ultraschallkopf messen Sie eine Frequenzverschiebung von 1,2kHz. Wie schnell fließt das Blut.

d) An einem Blutgefäß mit einer Flussgeschwindigkeit von 12cm/s messen Sie eine Frequenzverschiebung um 0,45kHz. In welchem Winkel liegt das Gefäß relativ zu ihrem Messapperat?

Lösung:

a) Die Einzelfrequenzen für auf den Sender zulaufendes Blut und vom Sender weg laufendes Blut sind $f_1 = f\left(1 + \frac{v}{c}\right)$ und $f_2 = f\left(1 - \frac{v}{c}\right)$. Die Gesamtfrequenzänderung ist nun gerade die Differenz aus diesen beiden Frequenzen: $\Delta f = f_1 - f_2 = 2f\frac{v}{c}$.

b) Bisher wurde vernachlässigt, dass die Schallgeschwindigkeit c und die Blutflussgeschwindigkeit v Vektoren sind. v und c schließen gemeinsam einen Winkel θ ein. Soll v nun wieder auf die Senkrechte zu c abgebildet werden, so geht dies über $v \cdot sin(180° - 90° - \theta) = v \cdot sin(90° - \theta) = v \cdot cos(\theta)$. Die obige Formel wird also zu $\Delta f = 2f\frac{v}{c}cos(\theta)$.

c) Zunächst wird die Formel aus a nach v umgestellt $v = \frac{\Delta f \cdot c}{2f}$. Mit den gegebenen Größen ergibt sich nun $v = \frac{1200Hz \cdot 1570\frac{m}{s}}{2 \cdot 3000000Hz} \approx 0{,}31\frac{m}{s}$.

d) Zunächst wird die Formel aus b nach θ umgestellt: $\theta = arccos\left(\frac{\Delta f \cdot c}{2fv}\right)$. Mit den gegebenen Größen erhält man $\theta = arccos\left(\frac{450Hz \cdot 1570\frac{m}{s}}{2 \cdot 3000000Hz \cdot 0{,}12\frac{m}{s}}\right) \approx 11{,}11°$.